## № 10-дәріс.

### Тақырыбы: Екінші ретті және жоғарғы ретті сызықты біртекті емес коэффициенттері тұрақты дифференциалдық теңдеулер.

Тұрақты коэффицентті және оң жағы квазиполином (көрсеткіштік функцияға көбейтілген көпмүшелік) деп аталатын $f(x)$ функциясы болатын дифференциалдық теңдеудің дербес шешімін тұрақты шаманы вариациалау әдісін қолданбай, басқа оңай әдіспен шығаруға болады.

$P_n(x)$ және $Q_m(x)$ сәйкесінше $n$-ші және $m$-ші дәрежелі көпмүшеліктер, ал $r$ саны мінездемелік теңдеудің түбірі $\alpha$ $(\alpha \pm i\beta)$ -ның еселігі болсын, егер $\alpha$ $(\alpha \pm i\beta)$ мінездемелік теңдеудің түбірі болмаса, онда $r = 0$.

Егер

1. $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, онда дербес шешімді мына түрде іздейміз: $y^* = x^r \overline{P_n}(x)e^{\alpha x}$, (1)

мұндағы $\overline{P_n}(x)$ - коэффиценттері белгісіз көпмүшелік.

2. $f(x) = [P_n(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x]e^{\alpha x}$, онда $\overline{y} = x^r[U_k(x)\cos \beta x + V_k(x)\sin \beta x]e^{\alpha x}$, (2)

мұндағы $k = max(n, m)$, ал $U_k$ және $V_k$ - коэффиценттері белгісіз көпмүшеліктер.

*Мысал 1.* Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x} \qquad (3)$$

*Шешуі.*

$y'' + 4y' + 3y = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

$k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = -3 \Rightarrow \tilde{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$.

(3) теңдеуінің дербес шешімін табалық: $f(x) = xe^{-x} \Rightarrow P_n(x) = x$, $\alpha = -1$ - бір еселі түбір $(\alpha = k_1) \Rightarrow r = 1, \overline{P_n}(x) = ax + b, y^* = x(ax + b)e^{-x}$, мұндағы $a$ және $b$ сандарын $y^*$ (3) теңдеуінің шешімі болатындай етіп алуымыз керек.

$(y^*)' = [-ax^2 + (2a - b)x + b]e^{-x} \Rightarrow (y^*)'' = [ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b]e^{-x}$.

Табылған $y^*$, $(y^*)'$, $(y^*)''$ -терді (3) теңдеуіне қоямыз және $x$-тің бірдей дәрежесінің коэффиценттерін теңестіре отырып, белгісіз коэффиценттерді табамыз:

$$\{[-ax^2 - (4a - b) + 2a - 2b] + 4[-ax^2 + (2a - b)x + b] + 3[ax^2 + bx]\}e^{-x} = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ax + (2a + 2b) \equiv x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \; b = -\frac{1}{4}.$$

Теңдеудің дербес шешімі $y^* = \frac{1}{4}x(x - 1)e^{-x}$, ал жалпы шешімі

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}x(x - 1)e^{-x}.$$

*Мысал 2.* $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

*Шешуі:* $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = 4 - 20 = -16 = 4i^2 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \Rightarrow$

$\tilde{y} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}$ - біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$f(x) = 2\cos x = 2\cos x \cdot e^{\alpha x} \Rightarrow P_n(x) = 2, Q_m(x) \equiv 0, \alpha = 0, \beta = 2 \Rightarrow \alpha \pm \beta i = \pm 2i$ мінездемелік теңдеудің түбірі болмайды, яғни,

$(\pm 2i \neq k_{1,2}) \Rightarrow r = 0, U_k(x) = A, V_k(x) = B, y^* = r^0(A\cos x + B\sin x) \cdot e^{0x} = A\cos x +$
$+ B\sin x \Rightarrow (y^*)' = B\cos x - A\sin x \Rightarrow (y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$. Табылған $y^*$, $(y^*)'$, $(y^*)''$ -терді теңдеуге қойсақ:

$(2B+4A)\cos x+(4B-2A)\sin x\equiv 2\cos x\Rightarrow$

$\begin{cases}2B+4A=2\\4B-2A=0\end{cases}\Rightarrow\ A=\frac{2}{5},\quad B=\frac{1}{5}\Rightarrow\ y^*=\frac{2}{5}cos\ x+\frac{1}{5}sin\ x\cdot$

Онда жалпы шешім:

$y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x\cdot$

*Мысал 3* . Теңдеудің жалпы шешімін тап: $y^{IV}-3y''=9x^2$

*Шешуі.* Мінездемелік теңдеуді құра отырып, оны шешіп, фундаменталдық шешімдер жүйесін табамыз және сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімін $\tilde{y}$ табамыз:

$$\lambda^4-3\lambda^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$$

$$\tilde{y}=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{3}}+C_4e^{-x\sqrt{3}}.$$

Мұнда α=0. Мінездемелік теңдеудің $\lambda_1=\lambda_2=0$ екі еселі түбірі α=0-мен беттеседі, ендеше, r=2 . Теңдеудің дербес шешімі (1) формулаға сәйкес $y^*=x^2(Ax^2+Bx+C)$ түрінде болады. Туындыларын есептелік:

$$(y^*)'=4Ax^3+3Bx^2+2Cx$$

$$(y^*)''=12Ax^2+6Bx+2C$$

$$(y^*)'''=24Ax+6B$$

$$(y^*)^{IV}=24A.$$

Табылған $(y^*)''$ , $(y^*)^{IV}$ -терді берілген теңдеуге қойсақ:

$$(y^*)^{IV}-3(y^*)''=-36Ax^2-18Bx-6C+24\equiv 9x^2$$

$x$ айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестіре отырып, A,B,C белгісіздерін анықтауға болатын алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases}-36A=9\\-18B=0\\-6C+24A=0\end{cases}$$

бұдан A=-1/4 , B=0, C=-1. Сонымен,

$$y^*=x^2(-\frac{1}{4}x^2-1).$$

Ендеше, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2x+C_3e^{x\sqrt{3}}+C_4e^{-x\sqrt{3}}\cdot+x^2(\frac{-1}{4}x^2-1).$$

*Мысал 4.* Коши есебін шеш:

$$y''-7y'+6y=(x-2)e^x,\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=3.$$

*Шешуі.* $\lambda^2-7\lambda+6=0$ мінездемелік теңдеудің түбірлері $\lambda_1=1,\lambda_2=6$ болғандықтан, берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі $\tilde{y}=C_1e^x+C_2e^{6x}$ .

Теңдеудің оң жағына мән берсек, α=1; $P_1(x)=x-2;$ α мінездемелік теңдеудің түбірі болғандықтан $r=1$ және берілген теңдеудің дербес шешімін $y^*=xe^x(Ax+B)$ түрінде іздейміз.

$y^{*''}-7y^{*'}+6y^*=e^x((6A-7A+A)x^2+(6B-7B-14A+2A+B+2A)x-7B+2A+2B)\equiv e^x(x-2)$

Теңдіктің екі жағын да $e^x$ -ке қысқартып, $x$ айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестірсек:

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases},$$

бұдан $A = -1/10$, $B = 9/25$ және дербес шешім:

$$y^* = e^x(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x).$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + e^x(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x).$$

Енді Коши есебін шешу үшін, $y'$-ті табамыз:

$$y' = C_1 e^x + 6C_2 e^{6x} + e^x(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x) + e^x(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}).$$

Бастапқы шарттарды ескере отырып, мынадай жүйе аламыз:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \qquad y'(0) = C_1 + 6C_2 + 9/25 = 3,$$

бұдан: $C_1$=84/125 , $C_2$ =41/125.

Сонымен, берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімі:

$$y = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}e^{6x} + e^x(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x).$$

*Мысал 5.* Берілген теңдеудің жалпы шешімін тап:

$$y'' + y = x\sin x + \cos 2x \qquad (4)$$

*Шешуі.* $\lambda^2 + 1 = 0$ мінездемелік теңдеуінің түбірлері $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$, онда $y'' + y = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімі $\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ болады.

Берілген (4) дифференциал теңдеуінің оң жағы екі квазиполиномның қосындысына тең: $f_1(x) = x\sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$. Сондықтан, (2) формуласын қолданып, алдымен

$$y'' + y = x\sin x$$

теңдеуінің дербес шешімі $y_1^*$-ті табамыз , одан кейін

$$y'' + y = \cos 2x$$

теңдеуінің $y_2^*$ дербес шешімін табамыз.

(4) теңдеуінің оң жағы $f_1(x)$ үшін: $a = 0,\ b = 1,\ \lambda = i = \lambda_1$, сондықтан $r = 1$ және

$.y_1^* = x((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x).$

$y_1^{*''} + y_1^* = (Ax^2 + Bx + 2Cx + 2A + D - Ax^2 - Bx + 2Cx + D)\cos x +$

$+ 9Cx^2 + Dx - Cx^2 - 2Ax - Dx - B - 2Ax - B + 2C)\sin x \equiv x\sin x.$

Ұқсас мүшелердің коэффиценттерін теңестіре отырып, $A, B, C, D$ және $y_1^*$ табамыз :

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & 4C = 0, \\ \cos x & 2A + 2D = 0, \\ x\sin x & -4A = 1, \\ \sin x & -2B + 2C = 0, \end{array} \Bigg\}$$

бұдан $A = -1/4,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 1/4$. Сонымен,

$$y_1^* = x(-\frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}\sin x) = \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x).$$

(4) теңдеуінің оң жағы $f_2(x)$ үшін: $a = 0,\ b = 2,\ \lambda = 2i$, сондықтан $r = 0$ және

$$y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x.$$

Ары қарай, ұқсас мүшелердің коэффиценттерін теңестірсек:

$$\begin{array}{c|l} 1 & y_2^{*} = M\cos 2x + N\sin 2x, \\ 0 & y_2^{*'} = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x, \\ 1 & y_2^{*''} = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x, \\ \hline \end{array}$$

$$y_2^{*''} + y_2^{*} = -3M\cos 2x - 3N\sin 2x \equiv \cos 2x$$

$-3M = 1,\ -3N = 0$ болады және $\quad y_2^{*} = -\dfrac{1}{3}\cos 2x$ .

Сонымен, $\quad y^{*} = y_1^{*} + y_2^{*} = \dfrac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \dfrac{1}{3}\cos 2x$

және берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$y = \tilde{y} + y^{*} = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x(\sin x - x\cos x) - \frac{1}{3}\cos 2x .$$

*Мысал 6.* Коши есебін шеш:

$$y'' - 2y' + 5y = 3e^{x} + e^{x}tg\,2x, \quad y(0) = 3/4,\ y'(0) = 2. \qquad (5)$$

*Шешуі.* Сәйкес біртекті теңдеудің $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ мінездемелік теңдеуінің түбірлері $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ . Онда $y'' - 2y' + 5y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімі:

$$\tilde{y} = e^{x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x).$$

(5) теңдеуінің оң жағы екі функцияның қосындысы ретінде берілген. Оның біріншісі $f_1(x) = 3e^{x}$ үшін: $P_r(x) = 3,\ a = 1,\ b = 0,\ \alpha = 1 \neq \lambda_{1,2}$ . Сондықтан, $y'' - 2y' + 5y = 3e^{x}$ теңдеуінің дербес шешімі $y_1^{*}$-ді былай іздейміз: $y_1^{*} = Ae^{x}$ , мұндағы $A$ белгісізі берілген теңдеуге $y_1^{*}$-ны қою көмегімен табылады.

Екінші функция $f_2(x) = e^{x}tg\,2x$ квазиполином емес және $y'' - 2y' + 5y = e^{x}tg\,2x$ теңдеуінің дербес шешімі $y_2^{*}$ -ны тұрақты шаманы вариациалау әдісімен (Лагранж әдісі) бойынша табылады. Әйгілі теоремаға сәйкес:

$$y_2^{*} = e^{x}(C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x) .$$

Біздің жағдайымызда жүйе екі теңдеуден тұрады:

$(y_1 = e^{x}\cos 2x,\ \ y_2 = e^{x}\sin 2x)$:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' e^{x}\cos 2x + C_2' e^{x}\sin 2x = 0, \\ &C_1' e^{x}(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2' e^{x}(\sin 2x + 2\cos 2x) = e^{x}tg\,2x. \end{aligned}\right\}$$

Жүйедегі теңдеулердің екі жағын да $e^{x}$-ке қысқартып:

$$\left.\begin{aligned} &C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0, \\ &C_1'(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'(\sin 2x + 2\cos 2x) = tg\,2x. \end{aligned}\right\}$$

Соңғы жүйенің анықтауышы (вронскиан):

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2co\,2x \end{vmatrix} = 2.$$

Крамер формуласын қолданып:

$$C_1' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ tg\,2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x\,tgx ,$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & tg\,2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Енді табылған теңдікті интегралдасақ:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln|tg(\pi/4 - x)| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Сонымен,

$$y_2^* = e^x(\frac{1}{4}\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x) = \frac{1}{4}e^x\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x.$$

Ендеше, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x\, ln\,|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\, cos\, 2x = \frac{1}{4}e^x(3 + ln\,|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\, cos\, 2x),$$

Ал оның жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x). \qquad (6)$$

Енді Коши есебін шешу үшін, $y'$-ті табамыз:

$$y' = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^x(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos s2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cos 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(-\frac{\cos 2x}{tg(\pi/4 - x)\cos^2(\pi/4 - x)} - 2\ln|tg(\pi/4 - x)|\sin 2x).$$

Берілген бастапқы шарттарды қолдансақ:

$$y(0) = 3/4 = C_1 + 3/4, \quad y'(0) = 2 = 2C_2 + 3/4 - 1/2,$$

бұдан $C_1 = 0,\ C_2 = 7/4.$

Сонымен, ізделінді дербес шешім:

$$y = \frac{1}{4}e^x(3 + 7\sin 2x + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cdot\cos 2x).$$